# Bölüm 11: Doğrusal Olmayan Optik
## Alıştırmalar

**11.1** (a) Şiddeti I ($W/m^2$) olarak verilen ışığın, doğrusal kırılma indisi n olan madde ortamı içinde elektrik alanının (E)

$$E = 27,4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2}$$

olarak verilebileceğini gösteriniz.

(b) I=2,5 $W/cm^2$ lazer ışığının GaAs yarıiletken içinde oluşturacağı elektrik alanın büyüklüğü nedir?

**Çözüm:**

(a)

$$I = \varepsilon v\left\langle |E|^2 \right\rangle = \left(\varepsilon_o n^2\right)\left(\frac{c}{n}\right)\left\langle |E|^2 \right\rangle$$

$$\left\langle |E|^2 \right\rangle = \left(\frac{1}{\varepsilon_o c}\right)\left(\frac{I}{n}\right) \qquad |E|^2 = 2\left(\frac{1}{\varepsilon_o c}\right)\left(\frac{I}{n}\right)$$

$$|E| = \left[2\left(\frac{1}{\varepsilon_o c}\right)\left(\frac{I}{n}\right)\right]^{1/2} = \left(\frac{2}{8,85\times10^{-12}(F/m)\times 2,99\times10^{8}(m/s)}\right)^{1/2}.\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2}$$

$$|E| = 27,4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2}$$

veya

$$I = \frac{\left\langle |E|^2 \right\rangle}{\eta} = \frac{\left\langle |E|^2 \right\rangle}{\eta_o / n} = n\frac{\left\langle |E|^2 \right\rangle}{(\mu_o/\varepsilon_o)^{1/2}} = \frac{1}{2}n\frac{|E|^2}{(\mu_o/\varepsilon_o)^{1/2}} \qquad \left\langle |E| \right\rangle = \frac{1}{2}|E|$$

$$|E| \cong (377\Omega)^{1/2}\left(\frac{2I}{n}\right)^{1/2} = 27,4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2}\ (V/m) \qquad \eta_o \cong 377\Omega$$

(b) I=2,5 $W/cm^2$

$$|E| \cong 27,4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2}\ (V/m) \qquad |E| \cong 27,4\left(\frac{2,5\times10^{4}\ \ W/m^2}{3.6}\right)^{1/2}(V/m) = 2283\ \ V/m$$

**11.2** Doğrusal olmayan etkileri gözleyebilmek için gerekli olan ışık gücünün değeri ne mertebededir? Böyle bir ışık kaynağının foton akısı nedir?

**Çözüm:**

Optik alan ($E$) ile ışık şiddet arasındaki $I$ (W/m$^2$) ilişkinin

$$E = 27,4\left(\frac{I}{n}\right)^{1/2}$$

olduğu hatırlanırsa atomda bir elektronu atoma bağlayan elektrik alanın büyüklüğü yaklaşık $10^{10}$-$10^{11}$ V/m$^2$ mertebesindedir. Buna göre şiddet

$$I = n\left(\frac{E}{27,4}\right)^2 = n\left(\frac{10^{11}\ V/m}{27,4}\right)^2 = n\times(1,3\times10^{19})\ W/m^2$$

$$I = N\hbar\omega \Rightarrow N = \frac{I}{\hbar\omega} = \frac{I}{\hbar cn(2\pi/\lambda)} = \frac{I}{hcn}\lambda = \frac{n\times(1,3\times10^{19})\ W/m^2}{n\times(6,62\times10^{-34}\ J/m^2)\times(3\times10^{8}\ m/s)}$$

$$N = \frac{(1,3\times10^{19})\ W/m^2}{(6,62\times10^{-34}\ J-s)\times(3\times10^{8}\ m/s)}\lambda(m) = 6,5\times10^{43}\ \lambda(m)\ \ foton/s-m^2$$

olarak dalgaboyuna bağlı olarak bulunur.

**11.3** Doğrusal olmayan ortamda Maxwell denkleminin

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = -S$$

şeklinde yazılabileceğini ve doğrusal olmayan terimlerin, $S = \mu_o\,\partial^2\vec{P}(\vec{E})/\partial t^2$ kaynak terimini içeren şekilde verilebileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o\frac{\partial^2\vec{P}(\vec{E})}{\partial t^2}$$

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_o\chi^{(1)}\vec{E} + \varepsilon_o\chi^{(2)}\vec{E}^2 + \varepsilon_o\chi^{(3)}\vec{E}^3 + \ldots = \varepsilon_o\chi^{(1)}\vec{E} + P_{NL}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o\frac{\partial^2\vec{P}(\vec{E})}{\partial t^2} = \mu_o\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_o\chi^{(1)}\vec{E} + P_{NL}\right)$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \mu_o\varepsilon_o\chi^{(1)}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_o\varepsilon_o\chi^{(1)}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2} \qquad \nabla^2\vec{E} - \left(\frac{1}{c^2} + \mu_o\varepsilon_o\chi^{(1)}\right)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \left(\frac{1}{(1/(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2})^2} + \mu_o\varepsilon_o\chi^{(1)}\right)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

$$n^2 = 1 + \chi^{(1)}, c = 1/(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2}, v = c/n$$

$$\nabla^2\vec{E} - \left(\frac{1}{(1/(\mu_o\varepsilon_o)^{1/2})^2} + \mu_o\varepsilon_o\chi^{(1)}\right)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \nabla^2\vec{E} - \mu_o\varepsilon_o\left(1+\chi^{(1)}\right)\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2\vec{E} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \boldsymbol{P}_{NL}}{\partial t^2}$$

**11.4** (a) İkinci harmonik üretiminde ışık şiddetinin

$$I \propto |E(2\omega)|^2 = \left|\frac{\sin[k_o(n_\omega - n_{2\omega})d]}{(n_\omega - n_{2\omega})}\right|^2$$

şeklinde verilebileceğini gösteriniz.

(b) Yukarıda verilen ifadenin maksimum olma koşulu (faz eşleme) için kristal kalınlığının

$$d_u = \frac{\lambda_o}{4|n_\omega - n_{2\omega}|}$$

olduğunu gösteriniz.

**Çözüm:**

$$\nabla^2\vec{E}(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}(r,t)}{\partial t^2} = \mu_o\frac{\partial^2\vec{P}(\vec{E}(r,t))}{\partial t^2} = \mu_o\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_o\chi^{(1)}\vec{E}(r,t) + \boldsymbol{P}_{NL}\right)$$

+z doğrultusunda ilerleyen, $\omega_1$, $\omega_2$ ve $\omega_3$ frekanslı 3 dalgaya odaklanalım

$$E^{(\omega_1)}(r,t) = E_{\omega_1}(z)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)}$$
$$E^{(\omega_1)}(r,t) = E_{\omega_1}(z)e^{i(\omega_1 t - k_1 z)}$$

$$E^{(\omega_+)}(r,t) = E_{\omega_1}(z)E_{\omega_2}(z)e^{i[(\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)z]}$$
$$E^{(\omega_-)}(r,t) = E_{\omega_1}(z)E_{\omega_2}(z)e^{i[(\omega_1-\omega_2)t - (k_1-k_2)z]}$$

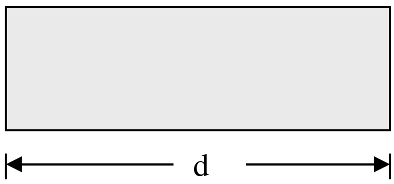
Ortamdaki anlık optik alan

$$\nabla^2 \vec{\boldsymbol{E}}(r,t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{E}}(r,t)}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2 \vec{\boldsymbol{P}}(\vec{\boldsymbol{E}}(r,t))}{\partial t^2} = \mu_o \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{\boldsymbol{E}}(r,t) + \boldsymbol{P}_{NL}\right)$$

Alanın konuma göre değişimi

$$\frac{dE^{(2\omega)}(z)}{dz} = -i\omega\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(2)}\left|E^{(\omega)}(z)\right|^2 e^{i\Delta kz} \text{ burada } \Delta k \equiv k_3 - 2k_1 = k^{(2\omega)} - 2k^{(\omega)}$$

d yolunu alan 2ω frekanslı dalganın çıkışdaki değeri




$$E^{(2\omega)}(d) = -i\omega\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\chi^{(2)}\left|E^{(\omega)}\right|^2 \frac{e^{i\Delta kd} - 1}{i\Delta k}$$

$$I \propto E^{(2\omega)}(d)E^{*(2\omega)}(d) = \left|E^{(2\omega)}(d)\right|^2 = \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)\frac{\omega^2(\chi^{(2)})^2}{n^2}\left|E(\omega)\right|^4 d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd/2)}{\Delta kd/2}$$

(b)

$$\left|\frac{\sin\left[k_o(n_\omega - n_{2\omega})d\right]}{(n_\omega - n_{2\omega})}\right|^2 = I_{mak} \qquad \sin\left[k_o(n_\omega - n_{2\omega})d\right] = 1 \Rightarrow k_o(n_\omega - n_{2\omega})d_u = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

$$d_u = (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{1}{k_o(n_\omega - n_{2\omega})} = (2n+1)\frac{\pi}{2}\frac{\lambda_o}{2\pi(n_\omega - n_{2\omega})}$$

$$d_u = (2n+1)\frac{\lambda_o}{4(n_\omega - n_{2\omega})} \qquad n = 0 \quad için \quad d_u = \frac{\lambda_o}{4(n_\omega - n_{2\omega})}$$

**11.5** Üçüncü dereceden doğrusal olmayan etkilerin etkin olduğu bir ortamda, gücü $P$, kesit alanı $A$ olan ışığın uzunluk başına oluşan faz kaymasının

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_o A}P$$

olarak verilebileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

Optik faz ifadesi $\varphi = kL = nk_o L = \dfrac{n}{\dfrac{\lambda_o}{2\pi}} L = \dfrac{2\pi n}{\lambda_o} L$

$$\varphi = kL = \frac{2\pi n}{\lambda_o} L = \frac{2\pi}{\lambda_o}(n_o + n_2 I)L$$

Faz kayması

$$\Delta\varphi = \varphi_{n_o} - \varphi_{n_2} = \frac{2\pi}{\lambda_o} n_o L - \frac{2\pi}{\lambda_o}(n_o + n_2 I)L = \frac{2\pi}{\lambda_o} n_2 I L$$

Birim uzunluk başına faz kayması

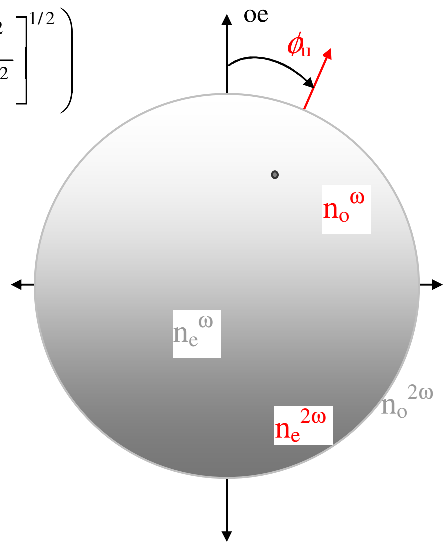
$$\frac{\Delta\varphi}{L} = \frac{2\pi}{\lambda_o} n_2 (\frac{P}{A}) = \frac{2\pi n_2}{\lambda_o} (\frac{P}{A})$$

---

**11.6** Kırılma indisi $n_o$ ve $n_e$ olan negatif tek eksenli çiftkırıcı bir ortamda ω ve 2ω frekanslı dalgaların aynı grup hızına sahip olabilmesi için geliş açısının, optik eksen ile yaptığı açının

$$\theta_u = \arcsin\left(\left[\frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}\right]^{1/2}\right)$$

olduğunu gösteriniz.




**Çözüm:**

Negatif tek eksenli kristal $n_e^{\omega} < n_o^{\omega}$ durumunda

$$n_e^{2\omega}(\theta_u) = n_o^{\omega}(\theta_u)$$

$$\frac{\cos^2\theta_u}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2\theta_u}{(n_e^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n_o^{\omega})^2}$$

$\theta_u$ için çözüm yapılırsa

$$\cos^2\theta_u = 1 - \sin^2\theta_u$$

$$\frac{1 - \sin^2\theta_u}{(n_o^{2\omega})^2} + \frac{\sin^2\theta_u}{(n_e^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n_o^{\omega})^2}$$

$$\frac{\sin^2\theta_u}{(n_o^{2\omega})^2} - \frac{\sin^2\theta_u}{(n_e^{2\omega})^2} = \frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} - \frac{1}{(n_o^{\omega})^2}$$

$$\sin^2\theta_u\left(\frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} - \frac{1}{(n_e^{2\omega})^2}\right) = \frac{1}{(n_o^{2\omega})^2} - \frac{1}{(n_o^{\omega})^2}$$

$$\sin^2\theta_u\left(\frac{(n_e^{2\omega})^2 - (n_o^{2\omega})^2}{(n_o^{2\omega})^2(n_e^{2\omega})^2}\right) = \frac{(n_o^{\omega})^2 - (n_o^{2\omega})^2}{(n_o^{2\omega})^2(n_o^{2\omega})^2}$$

$$\sin^2\theta_u = \left(\frac{(n_o^{\omega})^2 - (n_o^{2\omega})^2}{(n_o^{2\omega})^2(n_o^{2\omega})^2}\right)\left(\frac{(n_o^{2\omega})^2(n_e^{2\omega})^2}{(n_e^{2\omega})^2 - (n_o^{2\omega})^2}\right)$$

$$\sin^2\theta_u = \left(\frac{(n_o^{\omega})^2}{(n_o^{2\omega})^2} - 1\right)\left(\frac{1}{1 - \dfrac{(n_o^{2\omega})^2}{(n_e^{2\omega})^2}}\right)$$

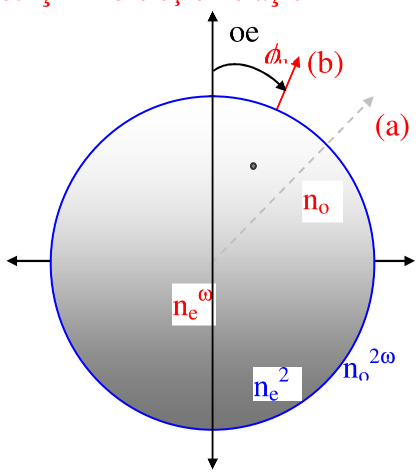
$$\theta_u = \arcsin\left(\left[\frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}\right]^{1/2}\right)$$ elde edilir.

**11.7** KDP malzemesi için 694 nm dalgaboylu lazer kullanıldığında faz eşleme açısını bulunuz?

**Çözüm:**

Dalgaboyu λ=694 nm olan lazer ışığının üreteceği ikinci harmoniğin dalgaboyu λ=347 nm olacaktır. Buna göre her iki dalga için KDP malzemesinin kırılma indis değerlerini bulmak gerekir. Maksimum şiddet için indis eşleme açısı

$$\theta_u = \arcsin\left(\left[\frac{(n_o^{\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}{(n_e^{2\omega})^{-2} - (n_o^{2\omega})^{-2}}\right]^{1/2}\right)$$




$n_o$(694 nm): 1,506,
$n_o$(347 nm): 1,534, $n_e$(347 nm)=1,490

$$\theta_u = \arcsin\left(\left[\frac{(1,506)^{-2} - (1,534)^{-2}}{(1,490)^{-2} - (1,534)^{-2}}\right]^{1/2}\right) \cong 53^o$$

**11.8** Merkezi simetri (terslenme simetrisi-inversin symmmetry) özelliği gösteren kristallerde ikinci dereceden doğrusal olmayan optik katsayısının ($\chi^{(2)}$) sıfır olacağını gösteriniz.

**Çözüm:**

Kutuplanma vektörü

$$\vec{P}(\vec{E}) = \varepsilon_o \chi^{(1)} \vec{E} + \varepsilon_o \chi^{(2)} \vec{E}^2 + \varepsilon_o \chi^{(3)} \vec{E}^3 + \ldots$$

Merkezi simeriye sahip kristallerde r → –r olduğunda kristal aynı özelliğe sahip olur. Böyle bir ortamda elektrik alanını yönü değiştirilirse kutuplanma vektörünün yönünün de değişmesi beklenir çünkü her taraf aynı özelliğe sahip.

E → +E P → (+P)

$$P = \varepsilon_o \chi^{(2)} (E).(E) = P \ldots\ldots\ldots 1$$

E → (-E) P → (-P)

$$-P = \varepsilon_o \chi^{(2)} (-E).(-E) = P \ldots\ldots 2$$

2 nolu denklemin $P = \varepsilon_o \chi^{(2)} (-E).(-E) = -P$ sağlanabilmesi için $\chi^{(2)} = 0$ olması gerekir.

**11.9** Helmholtz eşitliğinin

$$\nabla^2 E(r) + k_o^2 n^2(I) E(r) = 0$$

genliğin yayılma doğrultusu ile yavaş değiştiği paraksiyal yaklaşıklık durumunda ve doğrusal olmayan etkinin ( $n(I) = n_o + n_2 I$ ) çok küçük olduğu ($n_2$ <<1 ) durumda

$$\frac{\partial^2 E_o(x,z)}{\partial x^2} - 2ik_o \frac{\partial E_o(x,z)}{\partial z} + \frac{n_2 k_o^2}{\eta_o} \left| E_o(x,z) \right|^2 E_o(x,z) = 0$$

şeklinde yazılabileceğini gösteriniz.

**Çözüm:**

Genliğin yayılma doğrultusu ile yavaş değiştiği paraksiyal ışık durumunda

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla_T^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla_T^2 E(r) + \frac{\partial^2 E(r)}{\partial z^2} + k_o^2 n^2(I) E(r) = 0 \quad \nabla_T^2 E_o - 2ik_o \frac{\partial E_o}{\partial z} + \frac{\partial^2 E_o}{\partial z^2} + k_o^2 n^2(I) E = 0$$

Paraksiyel yaklaşım

$$\left|\frac{\partial^2 E_o(x,z)}{\partial z^2}\right| << \left|k_o \frac{\partial E_o(x,z)}{\partial z}\right|$$

y=0 olduğundan => $\nabla_T^2 \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$

$$\nabla_T^2 E_o - 2ik_o \frac{\partial E_o}{\partial z} + k_o^2 n^2(I) E = 0$$

Doğrusal olmayan etkinin çok küçük olduğu ($n_2$ <<1 ) durumda ( $n(I) = n_o + n_2 I$ ve $I = \dfrac{E^2}{2\eta}$ olduğundan)

$$\left[n^2(I) - n^2\right] = \left[n(I) + n\right].\left[n(I) - n\right] = n_2 I(2n + n_2 I) \cong 2nn_2 I = n^2 n_2 E_m^2 \frac{\left|E_o(x,z)\right|^2}{\eta_o}$$

$$\frac{\partial^2 E(x,z)}{\partial x^2} - i2k_o n \frac{\partial E(x,z)}{\partial z} + k_o^2\left[n^2(I) - n^2\right]E(x,z) = 0$$

elde edilir.